

9 класс

Второй день

- 9.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \dots, n$. Существует ли такое натуральное число m , что $S_{m+1} = 4S_m$?
- 9.7. На доску записали 99 чисел, среди которых нет равных. В тетрадку выписали $\frac{99 \cdot 98}{2}$ чисел — все разности двух чисел с доски (каждый раз из большего числа вычитали меньшее). Оказалось, что в тетрадке число 1 записано ровно 85 раз. Пусть d — наибольшее число, записанное в тетрадке. Найдите наименьшее возможное значение d .
- 9.8. Дан остроугольный треугольник ABC , в котором $AB < BC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а H — основание высоты, опущенной из вершины B . Вписанная окружность касается стороны AC в точке K . Прямая, проходящая через K и параллельная MN , пересекает отрезок MN в точке P . Докажите, что в четырехугольнике $AMPK$ можно вписать окружность.
- 9.9. Найдите наибольшее число m такое, что для любых положительных чисел a , b и c , сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \geq m.$$

- 9.10. Куб $100 \times 100 \times 100$ разбит на миллион единичных кубиков; в каждом кубике расположена лампочка. Три грани большого куба, имеющие общую вершину, окрашены: одна красным, другая синим, а третья зелёным. Назовём *столбцом* набор из 100 кубиков, образующих блок $1 \times 1 \times 100$. У каждого из 30 000 столбцов есть одна окрашенная торцевая клетка; в этой клетке стоит переключатель — нажатие на этот переключатель меняет состояние всех 100 лампочек в столбце (выключенная лампочка включается, а включенная выключается). Изначально все лампочки были выключены. Петя нажал на несколько переключателей, получив ситуацию, в которой ровно k лампочек горят. Докажите, что после этого Вася может нажать на несколько переключателей так, чтобы ни одна лампочка не горела, используя не более $k/100$ переключателей с красной грани.

9 класс

Второй день

- 9.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \dots, n$. Существует ли такое натуральное число m , что $S_{m+1} = 4S_m$?
- 9.7. На доску записали 99 чисел, среди которых нет равных. В тетрадку выписали $\frac{99 \cdot 98}{2}$ чисел — все разности двух чисел с доски (каждый раз из большего числа вычитали меньшее). Оказалось, что в тетрадке число 1 записано ровно 85 раз. Пусть d — наибольшее число, записанное в тетрадке. Найдите наименьшее возможное значение d .
- 9.8. Дан остроугольный треугольник ABC , в котором $AB < BC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а H — основание высоты, опущенной из вершины B . Вписанная окружность касается стороны AC в точке K . Прямая, проходящая через K и параллельная MH , пересекает отрезок MN в точке P . Докажите, что в четырехугольнике $AMPK$ можно вписать окружность.
- 9.9. Найдите наибольшее число m такое, что для любых положительных чисел a , b и c , сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \geq m.$$

- 9.10. Куб $100 \times 100 \times 100$ разбит на миллион единичных кубиков; в каждом кубике расположена лампочка. Три грани большого куба, имеющие общую вершину, окрашены: одна красным, другая синим, а третья зелёным. Назовём *столбцом* набор из 100 кубиков, образующих блок $1 \times 1 \times 100$. У каждого из 30 000 столбцов есть одна окрашенная торцевая клетка; в этой клетке стоит переключатель — нажатие на этот переключатель меняет состояние всех 100 лампочек в столбце (выключенная лампочка включается, а включенная выключается). Изначально все лампочки были выключены. Петя нажал на несколько переключателей, получив ситуацию, в которой ровно k лампочек горят. Докажите, что после этого Вася может нажать на несколько переключателей так, чтобы ни одна лампочка не горела, используя не более $k/100$ переключателей с красной грани.

10 класс

Второй день

10.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \dots, n$. Существует ли такое натуральное число m , что $S_{m+1} = 4S_m$?

10.7. Петя взял некоторые трёхзначные натуральные числа a_0, a_1, \dots, a_9 и написал на доске уравнение

$$a_9x^9 + a_8x^8 + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = *.$$

Докажите, что Вася сможет вместо звездочки написать некоторое 30-значное натуральное число так, чтобы получившееся уравнение имело целый корень.

10.8. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . На стороне AB выбрана точка L так, что $AL = CK$. Отрезки AK и CL пересекаются в точке M . На продолжении отрезка AD за точку D отмечена точка N . Известно, что четырёхугольник $ALMN$ — вписанный. Докажите, что $\angle CNL = 90^\circ$.

10.9. Дано натуральное число k . Вдоль дороги стоят n столбов через равные промежутки. Миша покрасил их в k цветов и для каждой пары одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, вычислил расстояние между ними. Все эти расстояния оказались различны. При каком наибольшем n так могло оказаться?

10.10. Докажите, что для любых трёх положительных вещественных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} + (y-z)\sqrt{3y^2+z^2} + (z-x)\sqrt{3z^2+x^2} \geq 0.$$

10 класс

Второй день

10.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \dots, n$. Существует ли такое натуральное число m , что $S_{m+1} = 4S_m$?

10.7. Петя взял некоторые трёхзначные натуральные числа a_0, a_1, \dots, a_9 и написал на доске уравнение

$$a_9x^9 + a_8x^8 + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = *.$$

Докажите, что Вася сможет вместо звездочки написать некоторое 30-значное натуральное число так, чтобы получившееся уравнение имело целый корень.

10.8. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . На стороне AB выбрана точка L так, что $AL = CK$. Отрезки AK и CL пересекаются в точке M . На продолжении отрезка AD за точку D отмечена точка N . Известно, что четырёхугольник $ALMN$ — вписанный. Докажите, что $\angle CNL = 90^\circ$.

10.9. Дано натуральное число k . Вдоль дороги стоят n столбов через равные промежутки. Миша покрасил их в k цветов и для каждой пары одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, вычислил расстояние между ними. Все эти расстояния оказались различны. При каком наибольшем n так могло оказаться?

10.10. Докажите, что для любых трёх положительных вещественных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} + (y-z)\sqrt{3y^2+z^2} + (z-x)\sqrt{3z^2+x^2} \geq 0.$$

11 класс

Второй день

- 11.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \dots, n$. Существует ли такое натуральное число m , что $S_{m+1} = 4S_m$?
- 11.7. Назовём два числа *почти равными*, если они равны или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Верно ли, что из любого прямоугольника с натуральными сторонами можно вырезать какой-нибудь прямоугольник с натуральными сторонами, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника? Стороны вырезаемого прямоугольника не обязательно параллельны сторонам исходного прямоугольника.
- 11.8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного неравностороннего треугольника ABC . На биссектрисе угла ABC внутри треугольника ABC отмечена точка D , а на отрезке BD — точка E так, что $AE = BE$ и $BD = CD$. Точки P и Q — центры окружностей, описанных около треугольников AOE и COD соответственно. Докажите, что точки A, C, P и Q лежат на одной прямой или на одной окружности.
- 11.9. Даны ненулевые числа a, b, c . Докажите, что выполняется неравенство

$$\left| \frac{b}{a} - \frac{b}{c} \right| + \left| \frac{c}{a} - \frac{c}{b} \right| + |bc + 1| > 1.$$

- 11.10. В стране $2n$ городов (n — натуральное), некоторые из них соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из любого города можно попасть в любой другой, возможно, с пересадками. Президент хочет разделить страну на две области и включить каждый город в одну из двух областей. При этом авиалинии разделятся на k межобластных и m внутриобластных. Докажите, что президент может добиться того, чтобы выполнялось неравенство $k - m \geq n$.

11 класс

Второй день

- 11.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \dots, n$. Существует ли такое натуральное число m , что $S_{m+1} = 4S_m$?
- 11.7. Назовём два числа *почти равными*, если они равны или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Верно ли, что из любого прямоугольника с натуральными сторонами можно вырезать какой-нибудь прямоугольник с натуральными сторонами, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника? Стороны вырезаемого прямоугольника не обязательно параллельны сторонам исходного прямоугольника.
- 11.8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного неравностороннего треугольника ABC . На биссектрисе угла ABC внутри треугольника ABC отмечена точка D , а на отрезке BD — точка E так, что $AE = BE$ и $BD = CD$. Точки P и Q — центры окружностей, описанных около треугольников AOE и COD соответственно. Докажите, что точки A, C, P и Q лежат на одной прямой или на одной окружности.
- 11.9. Даны ненулевые числа a, b, c . Докажите, что выполняется неравенство
- $$\left| \frac{b}{a} - \frac{b}{c} \right| + \left| \frac{c}{a} - \frac{c}{b} \right| + |bc + 1| > 1.$$
- 11.10. В стране $2n$ городов (n — натуральное), некоторые из них соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из любого города можно попасть в любой другой, возможно, с пересадками. Президент хочет разделить страну на две области и включить каждый город в одну из двух областей. При этом авиалинии разделятся на k межобластных и m внутриобластных. Докажите, что президент может добиться того, чтобы выполнялось неравенство $k - m \geq n$.