# 11 класс

## Задача №11-Т1. Вспоминая 90-е

Пусть $v_0$ - скорость досок $a$ и $b$ до соударения с доской $c$, а $m$ - масса каждой из досок. Поскольку трения между досками $a$ и $b$ нет, а доски $b$ и $c$ при ударе скрепляются - сразу после удара скорость доски $a$ равна $v_0$, а скорость досок $b$ и $c$ равна $v_0/2$ из закона сохранения импульса.

Введём ось $x$ по направлению скорости $v_0$. Поскольку горизонтальная поверхность гладкая - центр масс системы движется с постоянной скоростью, равной $v_{\text{цм}} = 2v_0/3$. В момент удара центр масс системы опережает центр доски $a$ на величину $l/3$, а к моменту, когда доска $a$ целиком оказалась на доске $c$, центр масс системы отстаёт от центра доски на ту же величину $l/3$. Тогда для перемещения доски $a$ получим:

$$\Delta x = \Delta x_{\text{цм}} + \frac{2l}{3} = \frac{2(v_0\tau + l)}{3}$$

где $\tau$ - время движения доски $a$ относительно досок $b$ и $c$. Далее объединим доски $b$ и $c$ в одно тело массой $2m$ и будем характеризовать его индексом 2. Доску $a$ будем характеризовать индексом 1. Пусть $\vec{F}$ - сила трения, действующая на первое тело со стороны второго, а $x$ - их относительное перемещение после удара. Отметим, что трение происходит только в области перекрытия досок $a$ и $c$. Величина силы трения скольжения прямо пропорциональна силе нормальной реакции шероховатой части поверхности опоры, и поэтому $F_x = -\mu mgx/l$. Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел:

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} \qquad 2m\vec{a}_2 = -\vec{F}$$

откуда:

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_{\text{отн}} = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}}{2m} = \frac{2\vec{F}}{3m}$$

Тогда получим уравнение движения для переменной $x$:

$$\ddot{x} = -\frac{2\mu gx}{3L}$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{2\mu g/3L}$. Его общее решение:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Определим $A$ и $\varphi_0$ из начальных условий:

$$\begin{cases} x(0) = A\sin\varphi_0 = 0 \\ \dot{x}(0) = \dfrac{v_0}{2} = \omega A\cos\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ A = \dfrac{v_0}{2\omega} \end{cases}$$

Величина $A$ имеет смысл амплитуды колебаний, которая также равна $L$, поскольку относительное движение досок прекращается, когда доска $a$ целиком оказывается на доске $c$. Таким образом, имеем связь:

$$\frac{v_0}{2\omega} = L$$

Время движения $\tau$ является четвертью периода гармонических колебаний с циклической частотой $\omega_0$, откуда:

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega}$$

Тогда для перемещения центра масс имеем:

$$\Delta x_{\text{цм}} = \frac{2v_0\tau}{3} = \frac{2\pi L}{3}$$

и окончательно находим:

$$\Delta x = \Delta x_{\text{цм}} + \frac{2L}{3} = \frac{2(\pi+1)L}{3}$$

### Задача №11-Т2. Нагревание насосом

Пусть $V$ – объём сосуда, $\nu_0$ – начальное количества вещества в сосуде, а $\Delta\nu$ – количество вещества, переместившееся в сосуд из атмосферы. Запишем уравнения состояния газа в сосуде до и после закачивания:

$$p_0V = \nu_0RT_0 \qquad p_1V = (\nu_0 + \Delta\nu)RT_1.$$

Пусть давление воздуха внутри насоса равняется $p_{\text{в}}$, а $dV_{\text{в}}$ – объём, занимаемый порцией воздуха в количестве вещества $d\nu$ внутри насоса. При закачивании указанной порции воздуха в сосуд насос совершает механическую работу $\delta A_{\text{н}}$, равную:

$$\delta A_{\text{н}} = p_{\text{в}}dV_{\text{в}}.$$

Но из уравнения Менделеева–Клапейрона $p_{\text{в}}dV_{\text{в}} = RT_0d\nu$, поэтому:

$$\delta A_{\text{н}} = RT_0d\nu.$$

Таким образом, полная механическая работа насоса $A_{\text{н}}$ составляет:

$$A_{\text{н}} = \Delta\nu RT_0.$$

Запишем первое начало термодинамики для системы, состоящей из изначального находившегося в сосуде газа и закаченного в него насосом:

$$A_{\text{н}} + U_0 + U_1 = U_{\text{к}}.$$

Здесь $U_0 = \nu_0 C_V T_0$ – начальная внутренняя энергия воздуха, изначально находившегося в сосуде, $U_1 = \Delta\nu C_V T_0$ – сумма внутренних энергий закачиваемого воздуха на этапе закачивания в сосуд, а $U_к = (\nu_0 + \Delta\nu) C_V T_1$ – конечная внутренняя энергия рассматриваемой системы. Молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме равна $C_V = 5R/2$. Отсюда:

$$\Delta\nu RT_0 + \frac{5\nu_0 RT_0}{2} + \frac{5\Delta\nu RT_0}{2} = \frac{5(\nu_0 + \Delta\nu)RT_1}{2}.$$

Таким образом:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{5\nu_0 + 7\Delta\nu}{5(\nu_0 + \Delta\nu)} = \frac{p_1}{p_0}\frac{\nu_0}{(\nu_0 + \Delta\nu)} \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{5}{7}\left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right).$$

Для отношения количеств вещества воздуха в сосуде после завершения процессов с насосом и до их начала имеем:

$$\frac{\nu_к}{\nu_0} = 1 + \frac{\Delta\nu}{\nu_0},$$

откуда:

$$\frac{\nu_к}{\nu_0} = \frac{2}{7} + \frac{5p_1}{7p_0}.$$

Для отношения температур $T_1/T_0$ имеем:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1}{p_0}\frac{\nu_0}{\nu_к}.$$

Таким образом:

$$T_1 = \frac{T_0}{\dfrac{2p_0}{7p_1} + \dfrac{5}{7}}.$$

## Задача №11-Т3. Равновесие в полях

Пусть $\vec{T}$ – сила, действующая на нить в точке её крепления, равная по модулю силе натяжения нити в данной точке. Тогда, поскольку система расположена в равновесии:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \lambda L\vec{E} = 0.$$

Введём систему координат $xy$, где ось $x$ направлена вправо, а ось $y$ – вертикально вверх. Тогда из условия равновесия:

$$E_y = \frac{mg}{\lambda L} \qquad E_x = \frac{T}{\lambda L}.$$

Свяжем силы натяжения нити $T_0 = mg$ в точке крепления груза и $T$ в точке крепления нити. Приведём два способа получения данной связи.

**Первый способ:**

Воспользуемся методом виртуальных перемещений. Мысленно поместим нить в гладкую трубку, повторяющую форму нити. Это не изменит силу натяжения, потому что нить с трубкой не взаимодействует. Сдвинем нить вдоль трубки на величину $dl$ в направлении от точки крепления груза к точке крепления нити. Тогда изменение формы нити эквивалентно перемещению участка нити длиной $dl$ из точки крепления груза в точку крепления нити, поскольку форма остальной части нити не изменится. Поскольку сила натяжения невесомой нити направлена вдоль нити, работа сил, приложенных к концам нити, на указанном виртуальном перемещении равна:

$$\delta A = T dl - T_0 dl = T dl - mg dl.$$

Совершаемая силами натяжения работа равна изменению потенциальной энергии нити в электростатическом поле:

$$\delta A = dW_p.$$

Поскольку перемещение нити эквивалентно перемещению её участка длиной $dl$ из точки крепления груза в точку крепления нити – изменение потенциальной энергии нити в электростатическом поле равно изменению потенциальной энергии соответствующего участка нити:

$$dW_p = \lambda dl(\varphi - \varphi_0) = \lambda dl \Delta\varphi,$$

где $\varphi$ и $\varphi_0$ – потенциалы электростатического поля в точках крепления нити и груза соответственно. Для изменения потенциала $\Delta\varphi$ имеем:

$$\Delta\varphi = -E_x(x - x_0) - E_y(y - y_0).$$

Поскольку $x - x_0 = -S$, а $y - y_0 = H$, для изменения потенциала $\Delta\varphi$ находим:

$$\Delta\varphi = E_x S - E_y H.$$

Таким образом:

$$T - mg = \lambda(E_x S - E_y H).$$

**Второй способ:**

Рассмотрим бесконечно малый элемент нити длиной $dl$. Условие его равновесия записывается следующим образом:

$$\left(\vec{T} + d\vec{T}\right) - \vec{T} + \vec{E}\lambda dl = 0.$$

Проецируя на направление касательной к нити, получим:

$$dT + \lambda E_{\|} dl = 0.$$

Пусть касательная к нити образует угол $\varphi$ с вертикалью. Тогда для $E_{\|}$ имеем:

$$E_{\|} = E\cos\varphi - E\sin\varphi,$$

откуда:

$$dT + E_y\lambda dl\cos\varphi - E_x\lambda dl\sin\varphi = 0.$$

Но при этом $dl\cos\varphi = dy$, а $dl\sin\varphi = -dx$, откуда:

$$dT + E_y\lambda dy + E_x\lambda dx = 0.$$

Суммируя, получим:

$$T - T_0 = T - mg = -E_y\lambda(y - y_0) - E_x\lambda(x - x_0).$$

Поскольку $y - y_0 = H$, а $x - x_0 = -S$, получим:

$$T - mg = \lambda(E_x S - E_y H).$$

Но поскольку $T = \lambda L E_x$:

$$\lambda L E_x - mg = \lambda(SE_x - HE_y) = \lambda SE_x - \lambda H \cdot \frac{mg}{\lambda L} \Rightarrow E_x = \frac{mg}{\lambda L}\frac{L-H}{L-S}.$$

Для напряжённости электростатического поля имеем:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2},$$

откуда:

$$E = \frac{mg}{\lambda L}\sqrt{1 + \left(\frac{L-H}{L-S}\right)^2}.$$

## Задача №11-Т4. Полный улёт

Постоянное магнитное поле не совершает работы над заряженной частицей, и поэтому, если пренебречь излучением, модуль скорости частицы не изменяется. Поэтому величина скорости частицы равна величине скорости при $t = 0$.

Отметим, что при конечных ускорениях всегда существует такой "малый"интервал времени после начала движения, на котором скорость удаления частицы от начального положения примерно равна начальной скорости, то есть можно считать, что $r \approx vt$. Поэтому для нахождения скорости частицы проведём касательную к графику функции в начале координат (верхняя прямая на графике). Величина скорости при этом численно равна тангенсу угла наклона этой прямой:

$$v = \frac{9{,}8\ \text{см}}{14\ \text{мкс}} \approx 7\ \text{км/с}.$$

Направим ось $z$ вдоль вектора индукции магнитного поля, выбирая для простоты начало координат так, чтобы $z = 0$ при $t = 0$. Обозначим $v_{||}$ проекцию вектора скорости частицы на ось $z$, а $v_\perp$ — величину перпендикулярной этой оси составляющей. Так как сила Лоренца, действующая на частицу, не имеет составляющей вдоль оси $z$,

$$z(t) = v_{||}t.$$

В сечении, перпендикулярном оси $z$, движение частицы происходит по окружности с постоянной скоростью $v_\perp$. Радиус этой окружности равен

$$R = \frac{mv_\perp}{qB},$$

где $B$ — модуль вектора магнитной индукции, а время одного оборота

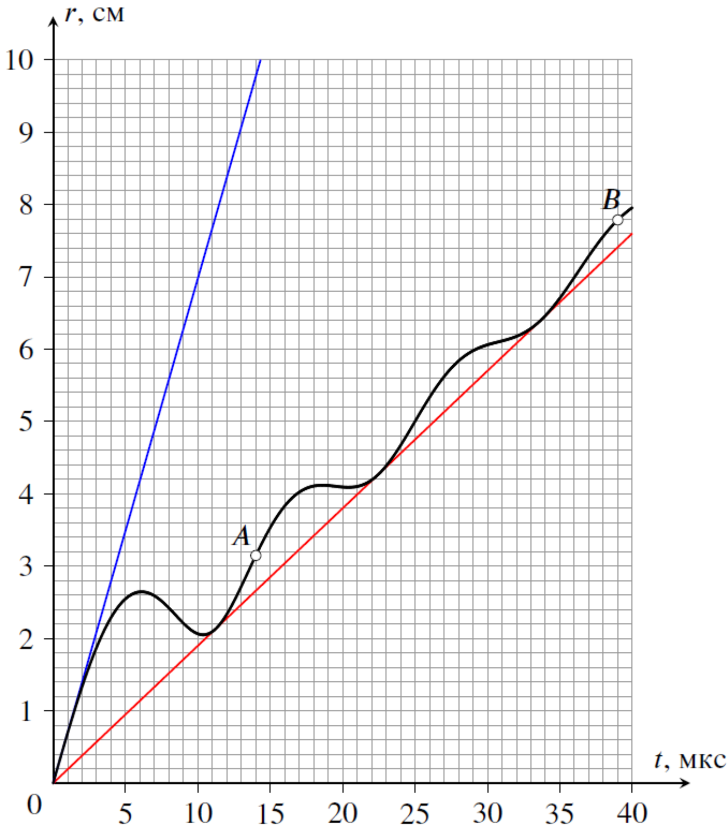
$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Таким образом, траектория частицы представляет собой винтовую линию с шагом $h = v_{||}T$ и радиусом $R = v_\perp T/(2\pi)$. Выбирая оставшиеся оси координат максимально удобным способом, можно записать, что

$$x(t) = R\cos(2\pi t/T), \qquad y(t) = R\sin(2\pi t/T),$$

откуда, учитывая, что в момент $t = 0$ частица находилась в точке с координатами $x = R$, $y = z = 0$, получим формулу зависимости модуля её перемещения от времени:

$$r(t) = \sqrt{(x(t) - R)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} = \sqrt{v_{||}^2 t^2 + 4R^2 \sin^2(\pi t/T)}.$$




Возьмём теперь выражение для $r(t)$ и поделим его на $t$:

$$\frac{r(t)}{t} = \sqrt{v_{||}^2 + 4R^2 \cdot \left(\frac{\sin(\pi t/T)}{t}\right)^2}.$$

Второе слагаемое в подкоренном выражении при любом $t$ не может быть меньше нуля, следовательно $r(t)/t \geqslant v_{||}$. Это значит, что прямая, идущая в координатах $r$-$t$ из начала, имеющая общие точки с приведённым в условии графиком и обладающая наименьшим угловым коэффициентом, является прямой $r = |v_{||}|t$. Соответственно, для того чтобы определить $v_{||}$, проведём касательную из начала координат к нижней части графика (нижняя прямая на рисунке). Точки касания соответствуют ситуации, когда частица находится на прямой, проходящей через начальную точку и параллельной линиям магнитного поля. Тангенс наклона такой прямой численно равен $|v_{||}|$:

$$|v_{||}| = \frac{7{,}6\text{ см}}{40\text{ мкс}} = 1{,}9\text{ км/с}.$$

Отсюда находим, что

$$\cos\alpha = \frac{v_{||}}{v} = \pm\frac{1{,}9}{7} \approx \pm 0{,}271 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 74^\circ \quad \text{или} \quad \alpha \approx 106^\circ.$$

Точки касания нижней прямой располагаются через равные промежутки времени, равные времени $T$ прохода частицей одного витка винтовой линии. Для увеличения точности возьмем крайнюю (третью) точку касания и определим значение $T$:

$$T = 34\text{ мкс}/3 \approx 11{,}3\text{ мкс}.$$

Отсюда получим, что

$$B = \frac{2\pi m}{qT} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 10^{-26}\text{ кг}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\text{ Кл}\cdot 11{,}3\cdot 10^{-6}\text{ с}} \approx 35\text{ мТл}.$$

Между положениями $A$ и $B$ прошло время, равное

$$t_{AB} = 39\text{ мкс} - 14\text{ мкс} = 25\text{ мкс}.$$

За это время частица сместилась вдоль линий магнитного поля на расстояние

$$\Delta z = |v_{||}|t_{AB} = 4{,}75\text{ см}.$$

В проекции на перпендикулярную магнитному полю плоскость частица движется по окружности с радиусом

$$R = (v_\perp T)/2\pi = T/2\pi\cdot\sqrt{v^2 - v_{||}^2} \approx 1{,}21\text{ см}.$$

Её смещение в этой плоскости равно

$$\Delta l = 2R\sin(\pi t_{AB}/T) \approx 1{,}50\text{ см}.$$

Отсюда получим значение расстояния $AB$:

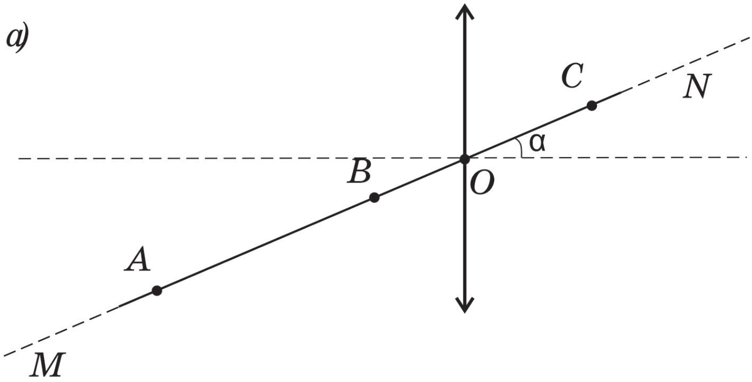
$$L_{AB} = \sqrt{\Delta l^2 + \Delta z^2} \approx 5{,}0\text{ см}.$$

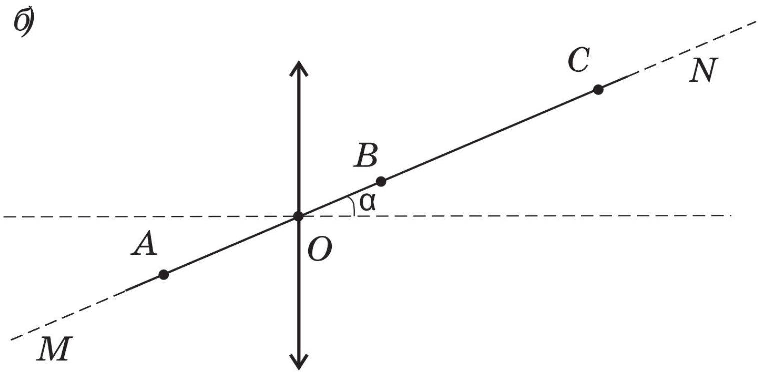
## Задача №11-Т5. Троеточие

Если линза рассеивающая, то, независимо от положения источника, его изображение будет мнимым, расположенным между источником и оптическим центром линзы. После перемещения источника в точку, где ранее было расположено его изображение, новое изображение окажется снова между источником и оптическим центром линзы. Получится бесконечная цепочка изображений. Таким образом, три точки с указанным свойством в случае рассеивающей линзы существовать не могут.

Линза может быть только собирающей.

Мнимое изображение в собирающей линзе всегда расположено дальше от линзы, чем источник, поэтому не может быть, что точки $A$, $B$ и $C$ являются мнимыми изображениями друг друга. Но, в соответствии с принципом обратимости хода световых лучей, при помещении источника в точку действительного изображения, его новое изображение совпадает с предыдущим положением источника. Поэтому описанным в условии свойством три точки могут обладать только в том случае, если две из них являются действительными изображениями друг друга, а при помещении источника в третью он дает мнимое изображение в одной из точек этой пары. Пусть, например, собирающая линза расположена так, что точка $A$ находится за её фокальной плоскостью. Тогда изображение $A$ будет действительным и будет расположено по другую сторону от плоскости линзы. При перемещении источника в точку этого изображения, новое изображение вернется в точку $A$. Оставшееся, третье положение источника, должно давать мнимое изображение в одной из первых двух точек. Значит, оно должно располагаться между этой точкой (своим изображением) и оптическим центром линзы $O$ ближе фокальной плоскости линзы. В этом случае линза могла быть расположена двумя способами (см. рисунок): а) оптический центр линзы находится между точками $B$ и $C$, причём источник в точке $B$ даёт мнимое изображение в точке $A$; б) оптический центр линзы находится между точками $A$ и $B$, причём источник в точке $B$ даёт мнимое изображение в точке $C$.




Таким образом, оптический центр линзы мог располагаться как справа так и слева от точки $B$.

Если же источник сначала расположить между фокальной плоскостью и плоскостью линзы, то изображение будет получаться мнимым. При помещении источника в точку изображения новое изображение должно получиться действительным (по другую сторону плоскости линзы). И при перемещении источника в оставшуюся, третью точку, изображение окажется на месте, где источник располагался ранее. Этот вариант идентичен представленному ранее и отдельного рассмотрения не требует.

Рассмотрим только способ а) размещения линзы, так как способ б) аналогичен. Источник, расположенный в точке $B$ на расстоянии меньшем фокусного, даёт мнимое изображение в точке $A$. При помещении источника в точку $A$ возникает действительное изображение в точке $C$, при помещении источника в точку

$C$ – действительное изображение в точке $A$. Обозначим расстояние между оптическим центром линзы и источником, угол между главной оптической осью линзы и прямой и фокусное расстояние линзы за за $d$, $\alpha$ и $F$ соответственно. Запишем формулу тонкой линзы для варианта расположения источника в точке $B$:

$$\frac{1}{d\cos\alpha} - \frac{1}{(l+d)\cos\alpha} = \frac{1}{F}.$$

Запишем формулу тонкой линзы для варианта расположения источника в точке $A$:

$$\frac{1}{(l+d)\cos\alpha} + \frac{1}{(l-d)\cos\alpha} = \frac{1}{F}.$$

Решая систему, находим $d$ и $\alpha$.

Расстояние между оптическим центром линзы и точкой $B$ равно $d = \frac{l}{3}$.

Решение системы уравнений дает: $\cos\alpha = \frac{9F}{4l}$, откуда $\alpha = \arccos\frac{9F}{4l}$. Поскольку в условии сказано, что угол $\alpha$ является малым, то допустимо на любом этапе вычислений использовать приближённое равенство $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Тогда приходим к формуле $\alpha \approx \sqrt{\frac{4l-9F}{2l}}$. Отметим, что малость угла означает, что с точностью до поправок порядка $\alpha^2$ параметры системы связаны соотношением $l \approx \frac{9}{4}F$.

Угол между главной оптической осью линзы и прямой $MN$ равен $\alpha = \arccos\frac{9F}{4l}$ или $\alpha \approx \sqrt{\frac{4l-9F}{2l}}$.