Материалы для проведения регионального этапа

LI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2024–2025 учебный год

Первый день

31 января – 1 февраля 2025 г.

Москва, 2025

Сборник содержит материалы для проведения III этапа LI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. Г. Храмцов. Г. Р. Челноков.

А также: С. Л. Берлов, Н. Ю. Власова, П. Ю. Козлов, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, А. И. Храбров, И. И. Фролов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2024–2025 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2024–2025 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2025 г.** (I тур) и **1 февраля 2025 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2024–2025 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. На прямой дороге стоят школа и дома Ани и Бори. Каждый день Аня выходит из дома в 8:00 и идет в школу. Однажды Боря выбежал из дома в школу в 8:00 и догнал Аню за 30 минут. На следующий день он выбежал в 8:10 и догнал Аню за 40 минут. В какое время ему надо выбежать, чтобы встретить Аню на выходе из её дома? (Скорость Ани всегда постоянна, скорость Бори тоже постоянна.) (*И. Богданов*)

Ответ. В 7:45.

Первое решение. Пусть S — расстояние между домами Ани и Бори (измеренное в метрах), а x и y — скорости Ани и Бори соответственно (измеренные в м/мин). Когда Боря догоняет Аню, скорость их сближения равна $y - x$. Поэтому в первый день Боря догнал Аню за $\frac{S}{y-x} = 30$ мин. Во второй же день Аня успела отойти на $10x$ м, так что $\frac{S+10x}{y-x} = 40$ мин. Отсюда имеем $S = 30(y-x) = 40(y-x) - 10x$, откуда $10y = 20x$ и $y = 2x$. Поэтому $30 = \frac{S}{y-x} = \frac{S}{x}$, а Боре надо потратить на путь между домами $\frac{S}{y} = \frac{S}{2x} = 15$ минут. Значит, выбежать ему надо в 7:45.

Второе решение. Изобразим условие на графике (см. рис. 1), откладывая по оси абсцисс время (в минутах, отсчитанное от момента 8:00), а по оси ординат — расстояние от дома Бори. Тогда графики движения обоих детей будут отрезками прямых. Пусть график движения Ани начинается в точке A, график движения Бори в первый и второй день — в точках B_1 и B_2, и пусть точки встречи в эти два дня обозначаются как

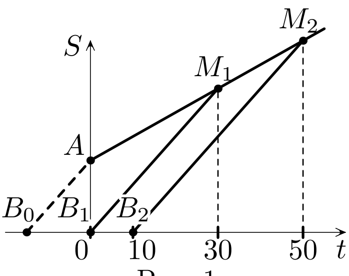

Рис. 1

M_1 и M_2 соответственно. По условию, абсциссы точек M_1 и M_2 равны 30 и 50 соответственно.

Пусть B_0 — точка, в которой должен начинаться график искомого движения Бори. По теореме Фалеса, $B_0B_1/B_1B_2 = AM_1/M_1M_2$; последнее отношение равно отношению разностей абсцисс соответствующих точек, то есть $30/20 = 3/2$. Значит, $B_0B_1 = 15$, то есть точка B_0 соответствует моменту 7:45.

9.2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса CD. На основании AC отмечена точка F так, что $BD = CF$. Точка E выбрана таким образом, что четырехугольник $CDEF$ — параллелограмм. Докажите, что $BE = BF$. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Продлим отрезок DE до пересечения со стороной BC в точке X (см. рис. 2). Поскольку $DX \parallel AC$, треугольник BDX равнобедренный. Кроме того, $\angle CDX = \angle DCA = \angle DCB$, поэтому треугольник CDX также равнобедренный, и $CX = DX$. Из параллелограмма $CDEF$ получаем $DE = CF = BD = BX$, так что $XE = XD + DE = CX + XB = BC$. Поскольку $\angle BXD = \angle BCF$, получаем, что треугольники BXE и FCB равны по двум сторонам и углу между ними, откуда и следует, что $BE = BF$.

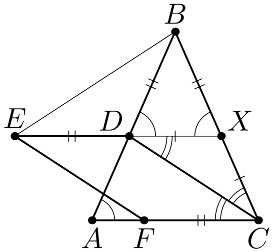

Рис. 2

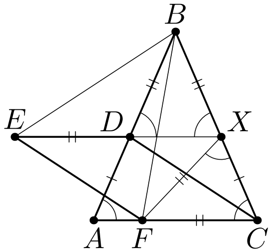

Рис. 3

Замечание. У этого решения есть много вариаций; в частности, вместо равенства треугольников BXE т FCB можно получить равенство треугольников BDE и BXF — например, так (см. рис. 3).

Заметим, что треугольник BDX равнобедренный, а трапеция $ABXC$ равнобокая (поскольку углы при основании равны), то есть $BD = BX$ и $CX = AD$. Теперь по свойству биссектрисы CD имеем

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{CX}{CF}.$$

Значит, треугольники ABC и XFC подобны (угол C в них общий), поэтому треугольник FCX также равнобедренный, откуда $XF = FC$ и $\angle FXC = \angle FCX = \angle BDX$.

Теперь в треугольниках BDE и BXF имеем $\angle EDB = \angle FXB$ и $DE = CF = FX = BD = BX$, то есть эти (равнобедренные) треугольники равны. Значит, $BE = BF$.

Второе решение. Пусть описанная окружность треугольника CBD пересекает вторично прямую AC в точке F' (см. рис. 4). Тогда $\angle F'DA = \angle ACB = \angle CAB = \angle ADE$; также, поскольку CD — (внутренняя или внешняя) биссектриса угла $F'CB$, имеем $F'D = BD = CF = DE$. Поэтому треугольники ADE и ADF' равны. Отсюда следует, что $\angle BDF' = 180° - \angle ADF' = 180° - \angle ADE = \angle BDE$, а тогда и треугольники BDF' и BDE также равны. Значит, $BF' = BE$.

Кроме того, из полученного равенства углов $F'DA$ и $F'AD$ следует, что $F'A = F'D = DE = CF$. Тогда треугольники BCF и BAF' также равны, и $BF = BF' = BE$, что и требовалось.

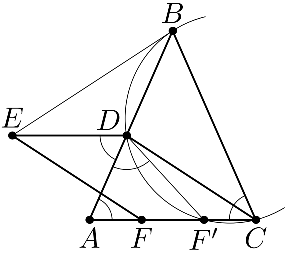

Рис. 4

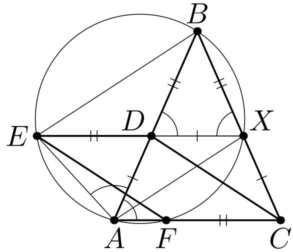

Рис. 5

Замечание. Аналогичное решение можно получить без введения точки F', но с использованием точки X из первого решения — например, так (см. рис. 5).

Как показано в начале первого решения, в равнобокой трапеции $ADXC$ имеем $AD = CX = DX$; кроме того, $BD = CF = DE$. Поэтому треугольники BDX и EDA равны, откуда несложно получить, что $AEBX$ — равнобокая трапеция, то есть B лежит на окружности ω, описанной около треугольника AXE.

Далее, диагонали трапеции $ADXC$ равны, так что $AX = CD = FE$. Значит, равны диагонали трапеции $AFXE$, то есть она тоже равнобокая и, следовательно, вписана. Поэтому и F лежит на ω. Наконец, в окружности ω имеем $\angle FAB = \angle XDB = \angle EXB = \angle EAB$, так что хорды BE и BF стягивают равные дуги этой окружности и потому равны.

Комментарий. Не доведённое до конца счётное решение оценивается в 0 баллов.

Если решение не проходит для расположения точек, отличного от рассмотренного, но хотя бы один существенный случай расположения точек разобран верно — не менее 6 баллов.

Введение в рассмотрение точки X или точки F' (или обеих) без дальнейших содержательных продвижений — 1 балл.

Доказательство подобия треугольников ABC и XFC (или равенства $FX = FC$) без дальнейших существенных продвижений — 3 балла.

Доказано, что один из четырёхугольников $AEBX$ или $AFXE$ вписан — 3 балла.

9.3. Даны квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$; обозначим $p_n = P(n)$ и $q_n = Q(n)$. Раз в минуту Саша рисует на координатной плоскости прямую: на первой минуте — прямую с уравнением $y = p_1x + q_1$, на второй — с уравнением $y = p_2x + q_2$, ..., на i-й минуте — с уравнением $y = p_ix + q_i$. Через некоторое время Саша нашёл три нарисованные прямые, которые проходят через одну точку. Докажите, что все нарисованные прямые проходят через одну точку. *(А. Терёшин)*

Решение. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$, в $Q(x) = ux^2 + vx + w$.

Пусть прямые, нарисованные на k-й и m-й минутах, пересекаются в точке с абсциссой x_0 (причём $p_k \neq p_m$) Это значит, что $p_kx_0 + q_k = p_mx_0 + q_m$, или

$$x_9 = \frac{q_m - q_k}{p_k - p_m} = \frac{u(m^2 - k^2) + v(m - k)}{a(k^2 - m^2) + b(k - m)} = -\frac{u(k + m) + v}{a(k + m) + b}. \quad (*)$$

Пусть теперь прямые, нарисованные на k-й, m_1-й и m_2-й минутах пересекаются в одной точке. Заметим, что квадратный трёхчлен $P(x)$ принимает каждое значение не более двух раз, поэтому без ограничения общности можно считать, что p_k отлично от p_ℓ и p_m. Тогда полученная формула означает, что

$$\frac{u(k+m_1)+v}{a(k+m_1)+b}=\frac{u(k+m_2)+v}{a(k+m_2)+b}. \qquad (**)$$

Домножив на знаменатели и сократив подобные слагаемые, получаем

$$(k+m_1)(ub-av)=(k+m_2)(ub-av),$$

что при $m_1 \neq m_2$ означает, что $ub-av=0$. Таким образом, равенство выше верно вообще для всех значений m_1 и m_2, а значит, и равенство $(**)$ будет выполнено для всевозможных значений m_1 и m_2, что и означает, что прямые, нарисованные в произвольные моменты m_1 и m_2, пересекают k-ю прямую в одной и той же точке.

Рассуждение выше может не сработать только для момента m, когда $p_k=p_m$. Но, поскольку нам уже известно, что все остальные прямые пересекаются в одной точке, можно теперь провести такое же рассуждение для других трёх моментов, установив требуемое.

Замечание. Из рассуждения выше нетрудно понять, что, если условие задачи выполнено, то при $p_k=p_m$ будет выполнено и $q_k=q_m$, то есть прямые, нарисованные на k-й и ℓ-й минутах, совпадут.

Комментарий. Получена последняя формула в $(*)$ для абсциссы x_0 — 1 балл.

Во в целом верном решении не разобран отдельно случай, когда $P(k)=P(m)$ при $k\neq m$, и решение не проходит в этом случае — снимается не более 2 баллов.

9.4. В каждой клетке доски 2×200 лежит по рублёвой монете. Даша и Соня играют, делая ходы по очереди, начинает Даша. За один ход можно выбрать любую монету и передвинуть её: Даша двигает монету на соседнюю по диагонали клетку, Соня — на соседнюю по стороне. Если две монеты оказываются в одной клетке, одна из них тут же снимается с доски и достаётся Соне. Соня может остановить игру в любой момент и забрать все полученные деньги. Какой наибольший выигрыш она может получить, как бы ни играла Даша? (*А. Кузнецов*)

Ответ. 300.

Решение. Сначала приведём стратегию за Соню. Пока она не получила больше 299 монет, перед её ходом на доске остаётся хотя бы 101 монета. Разобьем доску на 100 квадратов 2×2. Получается, что какие-то две монеты лежат в одном и том же квадрате 2×2. Если эти две монеты соседние по стороне, то Соня надвигает одну на другую, и получает ещё одну монету. Если они стоят по диагонали, то Соня сдвигает одну из них в столбец к другой (здесь и далее столбец имеет длину 2, строка — длину 200). Теперь, какой бы ход ни сделала Даша, эти две монетки всё ещё будут соседними по стороне (либо одна будет снята и уйдёт в доход Сони), значит, своим следующим ходом Соня сможет получить ещё одну монетку. Таким образом, Соня всегда сможет увеличивать свой выигрыш, пока он меньше 300.

Теперь покажем, как играть за Дашу, чтобы Соня не получила больше 300 монет. Пронумеруем столбцы числами от 1 до 200 по порядку, выберем в каждом нечётном столбце по одной монетке и мысленно покрасим их в красный цвет. Даше достаточно обеспечить, чтобы красные монетки всегда оставались на доске. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы две красные монеты никогда не попадали в одну клетку, потому что когда в клетку попадают красная и не красная монеты, можно считать, что с доски снимается не красная.

Назовём расположение монет на доске *стабильным*, если по одной красной монете лежит в столбцах $1, 3, 5, \ldots, 197$, а ещё одна располагается в одном из двух последних столбцов 199, 200. Легко видеть, что после любого хода из стабильной позиции две красные монеты не окажутся в одной клетке. Даша будет играть так, чтобы после каждого её хода получалась стабильная позиция. Если после хода Сони позиция осталась стабильной, то Даша двигает сотую красную фишку между двумя последними столбцами, так же Даша поступит и своим первым ходом. Если же после хода Сони позиция перестала быть стабильной, то Соня подвинула одну из красных монет из некоторого столбца x в соседний столбец. Тогда Даша своим ходом вернёт её в столбец

x. Таким образом, на доске всегда останется хотя бы 100 монет, и Соня заработает не более трёхсот рублей.

Комментарий.

Решение разбивается на две части: (A) — стратегия за Соню, (B) — стратегия за Дашу. Баллы, набранные за разные части, суммируются.

(A) Полная стратегия за Соню с обоснованием — 3 балла.

Эта часть состоит из трёх шагов:

(A1) Указано, что пока на столе есть хотя бы 101 монета, то какие-то две монеты располагаются в двух соседних строках и столбцах.

(A2) Показано, что Соня может забрать себе одну монету, когда две монеты лежат в соседних клетках.

(A3) Показано, что Соня может забрать себе одну монету за два хода, если они лежат в соседних по диагонали клетках.

Ситуация 1: Если а решении есть формулировки всех трёх шагов (A1)–(A3) с необходимыми логическими связями между ними, но в некоторых шагах допущены ошибки — выставляется 2 балла, если ошибка допущена в одном из пунктов, и 1 балл, если ошибки хотя бы в двух шагах.

Приведём примеры возможных ошибок.

Ошибка в (A1): неверное доказательство утверждения (например, с использованием «худшего случая»).

Ошибки в (A3). Во-первых, может быть сказано, что Соня ходит одной монетой просто в клетку, соседнюю с другой (а не в клетку того же столбца) — такая стратегия не работает. Во-вторых, после хода в соседний столбец может быть разобран лишь один из случаев, в котором Даша двигает или не двигает одну из монет.

Ситуация 2: В решении нет одного из шагов (A1), (A2), (A3).

Если есть любые два из этих шагов или лишь шаг (A3) — 1 балл, иначе 0 баллов.

(B) Стратегия за Дашу с обоснованием — 4 балла.

(B0) Лишь идея сохранять все красные монеты — 0 баллов.

(B1) Стратегия с возвратом монеты в тот же столбец, которая не работает, если Соня подвинула красную монету, не меняя её столбца — 2 балла.

9.5. Найдите все такие пары целых чисел m и $n > 2$, что $((n-1)! - n) \cdot (n-2)! = m(m-2)$.

Напомним, что $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до k. (*А. Кузнецов*)

Ответ. $m = 1$, $n = 3$.

Решение. Заметим, что $((n-1)! - 1)((n-2)! - 1) = (n-1)! \cdot (n-2)! - (n-1)! - (n-2)! + 1 = ((n-1)! - n) \cdot (n-2)! + 1 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$. Пусть $n > 4$. Заметим, что числа $(n-1)! - 1$ и $(n-2)! - 1$ взаимно просты. Предположим, что это не так, и оба этих числа делятся на простое число p. Тогда число $(n-1)! - 1 - ((n-2)! - 1) \cdot (n-1) = n - 2$ тоже делится на p. Тогда $(n-2)!$ делится на p, а $(n-2)! - 1$ не кратно p, противоречие. Таким образом, произведение взаимно простых чисел $(n-1)! - 1$ и $(n-2)! - 1$ — точный квадрат, тогда и каждое из них точный квадрат. Однако, число $(n-1)! - 1$ при $n > 4$ даёт остаток 3 при делении на 4, поэтому оно точным квадратом быть не может. Остаётся разобрать случаи $n \leqslant 4$. При $n = 4$ получается $(m-1)^2 = 5$, решений нет. При $n = 3$ мы получаем: $(m-1)^2 = 0$, что даёт единственное решение $m = 1, n = 3$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Потерян хотя бы один случай — не более 6 баллов.

Получено равенство $((n-1)! - 1)((n-2)! - 1) = (m-1)^2$ — 3 балла.

Доказано, что оба сомножителя в левой части являются квадратами (при $m > 1$) — ещё 1 балл.

Доказано, что не существует решений при $n \geqslant 10$ — не менее 5 баллов.

10 класс

10.1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два различных вещественных корня x_1 и x_2. Известно, что $f(x_1 + x_2) = 2025$. Чему может равняться c? (*Н. Агаханов*)

Ответ. 2025.

Первое решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Значит, $f(x_1 + x_2) = f(-\frac{b}{a}) = a \cdot (-\frac{b}{a})^2 + b \cdot (-\frac{b}{a}) + c = \frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a} + c = c$. Тогда из условия следует, что $c = 2025$.

Второе решение. График $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ — вертикальной прямой, проходящей через вершину параболы. Поэтому для любых двух значений $x = t_1$, $x = t_2$ таких, что $\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, будет выполнено $f(t_1) = f(t_2)$. В частности, $f(x_1 + x_2) = f(0)$. Но $f(0) = c$.

Третье решение. Подставим: $f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + c = ax_1^2 + 2ax_1x_2 + ax_2^2 + bx_1 + bx_2 + c = (ax_1^2 + bx_1 + c) + (ax_2^2 + bx_2 + c) + 2ax_1x_2 - c = f(x_1) + f(x_2) + (2ax_1x_2 - c)$. Так как x_1 и x_2 — корни, то $f(x_1) = f(x_2) = 0$, а по теореме Виета $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, получаем, что $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + (2ax_1x_2 - c) = 0 + 0 + 2c - c = c$.

Комментарий. Присутствует верный ответ (без обоснования) — добавляется 1 балл.

Сумма $x_1 + x_2$ выражена через коффициенты уравнения — 2 балла.

10.2. В стране 30 городов и 30 двусторонних авиалиний, соединяющих города по циклу. Можно ли добавить дополнительно ещё 10 авиалиний так, чтобы после этого из любого города можно было добраться до любого другого не более чем за 4 перелёта? (*П. Кожевников*)

Ответ. Можно.

Решение. Занумеруем города числами 0, 1, 2, ..., 29 так, чтобы изначально у нас был цикл $0 - 1 - 2 - 3 - \ldots - 28 - 29 - 0$. Добавим 9 авиалиний $0 - 3$, $0 - 6$, $0 - 9$, ..., $0 - 27$ (а 10-ю авиалинию добавим какую угодно).

Покажем, что условие выполняется. Возьмем любые два города A и B. От A можно не более чем за 1 перелёт добраться до города C с номером, кратным 3. Аналогично, от B можно не более чем за 1 перелёт добраться до города D с номером, кратным 3. А между городами C и D либо есть путь не более, чем из двух перелётов, так как все города с номерами, кратными 3, соединены с городом номер 0.

Комментарий. Если приведён верный пример, но отсутствует обоснование его правильности — 6 баллов (т.е. снимается 1 балл).

Если приведён верный пример, в котором добавлено менее 10 авиалиний — баллы не снижаются.

10.3. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 2$ и $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 4$. Докажите, что из чисел a, b, c какие-то два отличаются более чем на 2. (*А. Кузнецов*)

Решение. Вычтем из второго равенства первое и разложим левую часть на множители, получим:

$$(a - b)(b - c)(c - a) = 2. \quad (*)$$

Не умаляя общности (в условии имеется циклическая симметрия переменных a, b, c), будем считать, что c — наибольшее из данных чисел. Тогда $c - a \geqslant 0$, но из $(*)$ видим, что $c - a \neq 0$. Значит, $c - a > 0$. Аналогично $b - c < 0$. Тогда из $(*)$ следует $a - b < 0$. Получается $a < b < c$.

Обозначим $z = c - a$, $x = b - a$, $y = c - b$, так что $x > 0$, $y > 0$, $z = x + y$; тогда $(*)$ принимает вид $xyz = 2$. Нам нужно доказать, что $z > 2$.

Заметим, что $4xy \leqslant (x + y)^2$, так как это неравенство преобразуется к виду $(x - y)^2 \geqslant 0$ (или следует из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом). Отсюда $4xy \leqslant z^2$ и далее

$$2 = xyz = 4xy \cdot \frac{z}{4} \leqslant z^2 \cdot \frac{z}{4} = \frac{z^3}{4}.$$

Получаем $2 \leqslant \frac{z^3}{4}$, откуда $z^3 \geqslant 8$ и поэтому $z \geqslant 2$.

Остаётся показать, что $z = 2$ невозможно. Если $x \neq y$, то $(x - y)^2 > 0$, и тогда в предыдущем рассуждении мы получим строгое неравенство $z > 2$. Значит, $z = 2$ возможно лишь при $x = y = 1$. Рассмотрим этот случай отдельно.

В этом случае $v = a + 1 > 1$, и $c = a + 2 > 2$. Тогда
$$a^2b + b^2c + c^2a > b^2c > 1^2 \cdot 2 = 2,$$
что противоречит первому равенству из условия задачи.

Комментарий. При верном решении доказано только нестрогое неравенство ($c - a \geqslant 2$) (т.е. не рассмотрен или неверно рассмотрен случай обращения в равенство) — снимается 2 балла.

Получено равенство $(a - b)(b - c)(c - a) = 2$ — 2 балла (если просто сделано вычитание, но нет разложения на множители, то баллы не начисляются).

10.4. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости отметить конечное число узлов сетки так, чтобы было отмечено не менее двух точек, и для любой пары отмеченных точек нашлась бы отмеченная точка, равноудалённая от них? (*И. Ефремов*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что требуемое возможно. Введём систему координат так, чтобы узлы являлись в точности точками с целыми координатами.

Раскрасим узлы сетки в шахматном порядке. Предположим, что нашлись два отмеченных узла разных цветов: A — белый, B — чёрный. Пусть нашёлся узел C, равноудалённый от них, и пусть, не умаляя общности, C — белый. Тогда у вектора $\vec{CA}$ координаты одной чётности, значит, по теореме Пифагора CA^2 равно сумме квадратов целых чисел одной чётности, т.е. CA^2 чётно. Аналогично рассуждая, получаем, что CB^2 нечётно — противоречие.

Итак, все отмеченные узлы имеют один цвет. Проведём через все узлы этого цвета прямые с угловым коэффициентом ± 1 — получилась новая квадратная сетка с шагом (длиной стороны квадрата) $\sqrt{2}$. Видим, что отмеченные точки являются узлами этой новой сетки. Продолжая рассуждать аналогично, получим, что отмеченные узлы лежат на квадратной сетке с шагом $(\sqrt{2})^2$, $(\sqrt{2})^3$, $(\sqrt{2})^4$, $\ldots$. Но шаг сетки не может превышать константы — расстояния между двумя фиксированными отмеченными точками. Противоречие.

Замечание 1. Утверждение задачи станет неверным, если в условии задачи позволить отмеченным точкам не быть узлами решетки. Контрпримером может служить множество вершин правильного нечётноугольника.

Замечание 2. После доказательства того, что все отмеченные точки имеют один цвет (в шахматной раскраске), завершить решение можно по-другому.

Предположим теперь, что есть два отмеченных узла P и Q с абсциссами разной чётности. Рассмотрим узел R такой, что $RP = RQ$. Пусть, для определённости, $\vec{RP}$ имеет нечётную абсциссу (а значит, и нечётную ординату). Тогда $\vec{RQ}$ имеет чётную абсциссу (а значит, и чётную ординату). Тогда RQ^2 делится на 4, RP^2 имеет вид $(2k+1)^2 + (2l+1)^2 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2$ — не делится на 4 — противоречие.

Итак, мы доказали, что все отмеченные узлы лежат на клетчатой сетке со стороной 2. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что все отмеченные узлы лежат в некоторой сетке с шагом 2^k для любого натурального k, что, очевидно, невозможно.

Комментарий. Доказано, что все отмеченные точки должны иметь один цвет в шахматной раскраске (или, эквивалентно, иметь одинаковую (или разную) чётность координат) — 2 балла.

10.5. Высоты BD и CE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H, высоты треугольника ADE пересекаются в точке F, точка M — середина стороны BC. Докажите, что $BH + CH \geqslant 2FM$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Отразим H относительно AB, получим точку C', лежащую на CH и такую, что E — середина HC' и $BC' = BH$ (см. рис. 6). Аналогично, точка B', симметричная H относительно AC, такова, что D — середина HB' и $CB' = CH$.

Так как $DF \perp AB$, имеем $DF \parallel CE$. Аналогично $EF \parallel BD$. Значит, $HEFD$ — параллелограмм. В треугольнике $HC'B'$ точки E и D — середины сторон. Отметим также середину F' стороны $B'C'$, тогда $HEF'D$ — параллелограмм. Получается, что F' совпадает с F, т.е. F — середина $B'C'$. Так как M и F — середины BC и $B'C'$, имеем векторное равенство

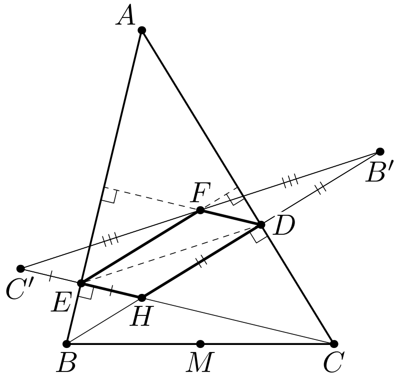

Рис. 6

$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CB'})$. Тогда по неравенству треугольника ($|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$) получаем $MF \leqslant \frac{1}{2}(BC' + CB')$, что равно $\frac{1}{2}(BH + CH)$. Этим доказано нужное неравенство.

Замечание. Из решения несложно понять, что указанное в условии неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $BC' \parallel CB'$, что эквивалентно $\angle BAC = 60^\circ$.

Используемую «векторную теорему о средней линии» можно доказать, сложив равенства $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{C'F}$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{B'F}$ и воспользовавшись тем, что $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{C'F} + \overrightarrow{B'F} = \vec{0}$.

Комментарий. Использованы точки, симметричные H относительно AB и AC — 1 балл.

За начальные наблюдения ($HEFD$ — параллелограмм, и т.п.) баллы не добавляются.

При использовании «векторной теоремы о средней линии» достаточно наличия её верной формулировки (т.е. если её доказательство не приведено в работе, баллы не снимаются).

11 класс

11.1. Существуют ли четыре попарно различных положительных числа a, b, c, d, при которых все четыре числа $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{b+c}{b-c}$, $\frac{c+d}{c-d}$, $\frac{d+a}{d-a}$ — целые? (*В. Шурыгин*)

Ответ. Существуют.

Решение. Пусть $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 6$. Тогда $\frac{a+b}{a-b} = -7$, $\frac{b+c}{b-c} = -9$, $\frac{c+d}{c-d} = -11$, $\frac{d+a}{d-a} = 9$.

11.2. Вещественные числа x, y, z таковы, что $2x > y^2+z^2$, $2y > z^2+x^2$, $2z > x^2 + y^2$. Докажите, что каждое из чисел x, y, z меньше 1. (*Н. Агаханов*)

Первое решение. Сложим первые два неравенства. Преобразуя, получаем неравенство:

$$0 > (x-1)^2 + (y-1)^2 + 2(z^2-1).$$

Следовательно, $z^2 < 1$. Тогда $z < 1$, аналогично для других двух переменных.

Второе решение. Не умаляя общности, предположим, что $x \geqslant y \geqslant z$. Тогда $2y \geqslant 2z > x^2 + y^2$. Добавив к обеим частям неравенства $1 - 2y$, имеем: $1 > x^2 + (y-1)^2 \geqslant x^2$, откуда наибольшее из чисел $x < 1$. Значит, и все числа меньше 1.

Третье решение. Из условия следует, что $2x > y^2+z^2 \geqslant 0$, аналогично y, $z > 0$. Также $2x > y^2 + z^2 \geqslant 2yz$ по неравенству о средних. Значит, $x > yz$, аналогично $y > zx$ и $z > xy$. Не умаляя общности можно считать, что x — минимальное из чисел x, y, z, тогда $y \geqslant x > yz$, откуда $z < 1$, аналогично $y < 1$, а тогда и $x < 1$.

11.3. В каждой клетке доски 2×200 лежит по рублёвой монете. Даша и Соня играют, делая ходы по очереди, начинает Даша. За один ход можно выбрать любую монету и передвинуть её: Даша двигает монету на соседнюю по диагонали клетку, Соня — на соседнюю по стороне. Если две монеты оказываются в одной клетке, одна из них тут же снимается с доски и достаётся Соне. Соня может остановить игру в любой момент и забрать все полученные деньги. Какой наибольший выигрыш она может получить, как бы ни играла Даша? (*А. Кузнецов*)

Ответ. 300.

Решение. Сначала приведём стратегию за Соню. Пока она не получила больше 299 монет, перед её ходом на доске остаётся хотя бы 101 монета. Разобьем доску на 100 квадратов 2×2. Получается, что какие-то две монеты лежат в одном и том же квадрате 2×2. Если эти две монеты соседние по стороне, то Соня надвигает одну на другую, и получает ещё одну монету. Если они стоят по диагонали, то Соня сдвигает одну из них в столбец к другой (здесь и далее столбец имеет длину 2, строка — длину 200). Теперь, какой бы ход ни сделала Даша, эти две монетки всё ещё будут соседними по стороне (либо одна будет снята и уйдёт в доход Сони), значит, своим следующим ходом Соня сможет получить ещё одну монетку. Таким образом, Соня всегда сможет увеличивать свой выигрыш, пока он меньше 300.

Теперь покажем, как играть за Дашу, чтобы Соня не получила больше 300 монет. Пронумеруем столбцы числами от 1 до 200 по порядку, выберем в каждом нечётном столбце по одной монетке и мысленно покрасим их в красный цвет. Даше достаточно обеспечить, чтобы красные монетки всегда оставались на доске. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы две красные монеты никогда не попадали в одну клетку, потому что когда в клетку попадают красная и не красная монеты, можно считать, что с доски снимается не красная.

Назовём расположение монет на доске *стабильным*, если по одной красной монете лежит в столбцах $1, 3, 5, \ldots, 197$, а ещё одна располагается в одном из двух последних столбцов 199, 200. Легко видеть, что после любого хода из стабильной позиции две красные монеты не окажутся в одной клетке. Даша будет играть так, чтобы после каждого её хода получалась стабильная позиция. Если после хода Сони позиция осталась стабильной, то Даша двигает сотую красную фишку между двумя последними столбцами, так же Даша поступит и своим первым ходом. Если же после хода Сони позиция перестала быть стабильной, то Соня подвинула одну из красных монет из некоторого столбца x в соседний столбец. Тогда Даша своим ходом вернёт её в столбец x. Таким образом, на доске всегда останется хотя бы 100 монет, и Соня заработает не более трёхсот рублей.

Комментарий.

Решение разбивается на две части: (A) — стратегия за Соню, (B) — стратегия за Дашу. Баллы, набранные за разные части, суммируются.

(A) Полная стратегия за Соню с обоснованием — 3 балла.

Эта часть состоит из трёх шагов:

(A1) Указано, что пока на столе есть хотя бы 101 монета, то какие-то две монеты располагаются в двух соседних строках и столбцах.

(A2) Показано, что Соня может забрать себе одну монету, когда две монеты лежат в соседних клетках.

(A3) Показано, что Соня может забрать себе одну монету за два хода, если они лежат в соседних по диагонали клетках.

Ситуация 1: Если а решении есть формулировки всех трёх шагов (A1)–(A3) с необходимыми логическими связями между ними, но в некоторых шагах допущены ошибки — выставляется 2 балла, если ошибка допущена в одном из пунктов, и 1 балл, если ошибки хотя бы в двух шагах.

Приведём примеры возможных ошибок.

Ошибка в (A1): неверное доказательство утверждения (например, с использованием «худшего случая»).

Ошибки в (A3). Во-первых, может быть сказано, что Соня ходит одной монетой просто в клетку, соседнюю с другой (а не в клетку того же столбца) — такая стратегия не работает. Во-вторых, после хода в соседний столбец может быть разобран лишь один из случаев, в котором Даша двигает или не двигает одну из монет.

Ситуация 2: В решении нет одного из шагов (A1), (A2), (A3).

Если есть любые два из этих шагов или лишь шаг (A3) — 1 балл, иначе 0 баллов.

(B) Стратегия за Дашу с обоснованием — 4 балла.

(B0) Лишь идея сохранять все красные монеты — 0 баллов.

(B1) Стратегия с возвратом монеты в тот же столбец, которая не работает, если Соня подвинула красную монету, не меняя её столбца — 2 балла.

11.4. Найдите все такие пары целых чисел m и $n > 2$, что $((n-1)! - n) \cdot (n-2)! = m(m-2)$.

Напомним, что $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до k. (*А. Кузнецов*)

Ответ. $m = 1$, $n = 3$.

Решение. Заметим, что $((n-1)! - 1)((n-2)! - 1) = (n-1)! \cdot (n-2)! - (n-1)! - (n-2)! + 1 = ((n-1)! - n) \cdot (n-2)! + 1 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$. Пусть $n > 4$. Заметим, что числа $(n-1)! - 1$ и $(n-2)! - 1$ взаимно просты. Предположим, что это не так, и оба этих числа делятся на простое число p. Тогда число $(n-1)! - 1 - ((n-2)! - 1) \cdot (n-1) = n - 2$ тоже делится на p. Тогда $(n-2)!$ делится на p, а $(n-2)! - 1$ не кратно p, противоречие. Таким образом, произведение взаимно простых чисел $(n-1)! - 1$ и $(n-2)! - 1$ — точный квадрат, тогда и каждое из них точный квадрат. Однако, число $(n-1)! - 1$ при $n > 4$ даёт остаток 3 при делении на 4, поэтому оно точным квадратом быть не может. Остаётся разобрать случаи $n \leqslant 4$. При $n = 4$ получается $(m-1)^2 = 5$, решений нет. При $n = 3$ мы получаем: $(m-1)^2 = 0$, что даёт единственное решение $m = 1, n = 3$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Потерян хотя бы один случай — не более 6 баллов.

Получено равенство $((n-1)! - 1)((n-2)! - 1) = (m-1)^2$ — 3 балла.

Доказано, что оба сомножителя в левой части являются квадратами (при $m > 1$) — ещё 1 балл.

Доказано, что не существует решений при $n \geqslant 10$ — не менее 5 баллов.

11.5. В треугольнике ABC с углом $100°$ при вершине A медианы BK и CN пересекаются в точке M. Прямая, проходящая через точку M и параллельная BC, пересекает описанную окружность треугольника AKN в точках P и Q. Найдите сумму углов BPC и BQC. (*К. Бельский*)

Ответ. $280°$.

Решение. Обозначим через R точку пересечения прямой PQ с отрезком BN (см. рис. 7). Заметим, что NK — средняя линия треугольника ABC, поэтому $NK \parallel BC \parallel PQ$. Значит, по теореме Фалеса $\frac{RN}{RB} = \frac{MK}{MB} = \frac{1}{2}$, последнее равенство следует из того, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

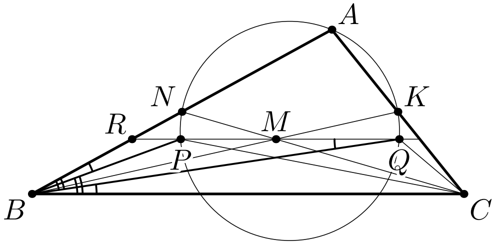

Рис. 7

Обозначим $RN = x$. Тогда $BR = 2x$, $BN = AN = 3x$, $AR = 4x$. Поскольку четырёхугольник $ANPQ$ вписанный, имеем $RP \cdot RQ = RN \cdot RA = x \cdot 4x = (2x)^2 = BR^2$. Следовательно, прямая BR касается описанной окружности треугольника BPM, поэтому $\angle ABP = \angle BQP = \angle QBC$, а тогда и $\angle ABQ = \angle CBP$. Рассуждая аналогично, получаем, что $\angle ACP = \angle QCB$. Значит,

$$\begin{aligned}
&\angle BPC + \angle BQC = \\
&= 180^\circ - \angle PBC - \angle PCB + 180^\circ - \angle QBC - \angle QCB = \\
&= 360^\circ - \angle PBC - \angle PCB - \angle PBA - \angle PCA = \\
&= 180^\circ + \angle BAC = 280^\circ.
\end{aligned}$$